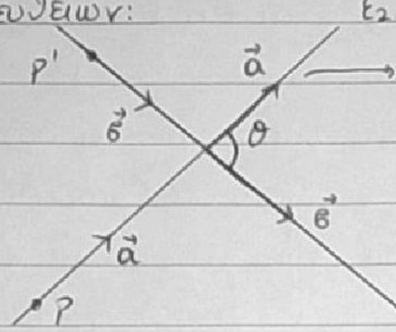
Μαθημα 15º No. Date 13/4/2016

Αναλυτικη Γεωμετρια

Γωνια 2 ευθειων:

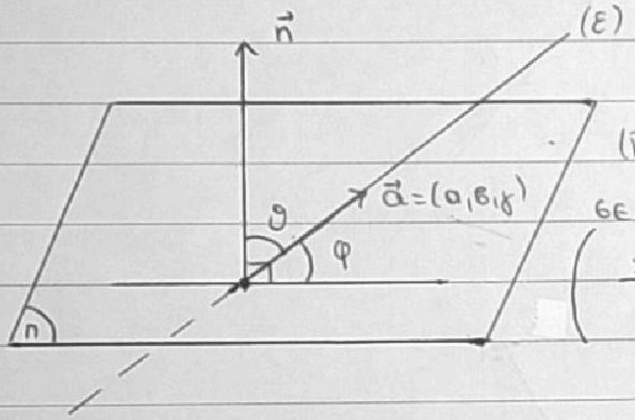


$\longrightarrow$ μεταφορα των διανυσματων

$$\text{γωνια}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \text{γωνια}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$$

$$\cos\theta = \frac{|\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle|}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}$$

Γωνια Ευθειας - Επιπεδου



$\Rightarrow$ Γνωριζουμε σημειο της (P_1) και διανυσμα παραλληλο σε αυτη $\vec{\alpha} = (\alpha, \beta, \gamma)$

$$\left(\frac{x - x_1}{\alpha} = \frac{y - y_1}{\beta} = \frac{z - z_1}{\gamma} \right)$$

$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$

$(\pi): \ Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$

το $\vec{n} = (A, B, \Gamma) \perp (\pi)$

Για την ευρεση της φ

$\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$ οπου η θ προσδιοριζεται απο τον τυπο:

$$\cos\theta = \frac{|\langle \vec{\alpha}, \vec{n} \rangle|}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{n}|}$$

Παρατηρησεις

S.O.S για εξετασεις

(1) Εστω (π): $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ και (ε): $\vec{r}=\vec{r_1}+\lambda\cdot\vec{\alpha}$

{η (ε) διερχεται απο P_1 και ειναι $\parallel \vec{\alpha}$}

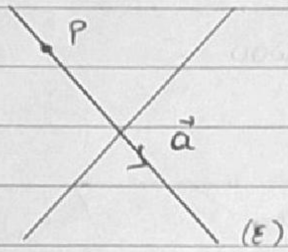
Ποτε ισχυει $(\varepsilon)\parallel\pi$;

$(\varepsilon)\parallel(\pi) \iff \vec{n}=(A,B,\Gamma)\perp(\pi)$ ειναι και καθετο στην (ε)

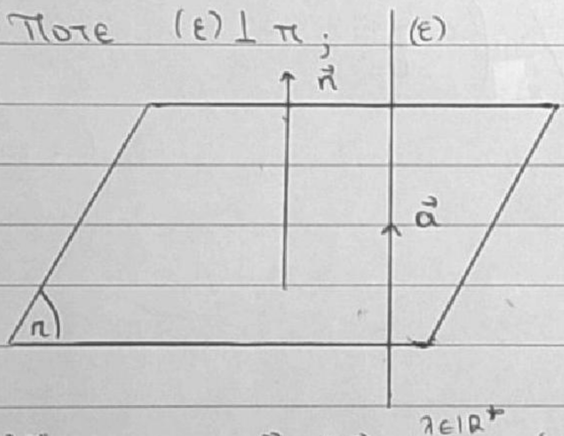
και καθετο στο $\vec{\alpha}$ {σε οποιοδηποτε παραλληλο της (ε) αλλα εδω γνωριζουμε το $\vec{\alpha}$}

$\Updownarrow$

$\langle\vec{n},\vec{\alpha}\rangle=0 \iff \cos\theta=0 \iff \theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi=0 \Rightarrow \varepsilon\parallel(\pi)$



(2) Ποτε $(\varepsilon)\perp\pi$;



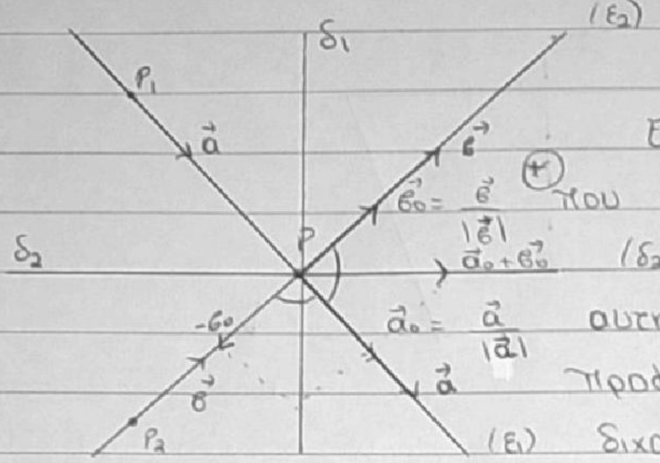
$(\varepsilon)\perp\pi \iff \vec{n}=\lambda\cdot\vec{\alpha} \overset{\lambda\in\mathbb{R}^*}{\iff} (A,B,\Gamma)=\lambda\cdot(\alpha,\beta,\gamma) \iff$

$\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}=\frac{\Gamma}{\gamma}$

{Δεν μας πειραζει να εχω μηδεν στον παρονομαστη αν γινει αυτο πρεπει υποχρεωτικα να πω σα και ο αριθμητης ειναι μηδεν αλλιως θα εχω προβλημα.}

Διχοτομος δυο ευθειων

(+) Τα κανω πρωτα μοναδιαια!



Εστω (ε₁), (ε₂) ευθειες (+) που τεμνονται σε σημειο P (δ₂), (δ₁) χρειαζομαστε σημειο αυτης και διανυσμα // με αυτη. Προφανως το P σημειο των διχοτομων

$\vec{a_0} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ και $\vec{б_0} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$.

Αρα $\vec{a_0} + \vec{б_0} = (\lambda_1+\mu_1, \lambda_2+\mu_2, \lambda_3+\mu_3)$

(δ_2). $\dfrac{x-x_0}{\lambda_1+\mu_1} = \dfrac{y-y_0}{\lambda_2+\mu_2} = \dfrac{z-z_0}{\lambda_3+\mu_3}$.

Παραδειγμα.

Δινονται οι (ε₁), (ε₂) οι οποιες διερχονται απο P(1, -4, 3) και ειναι παραλληλες προς τα $\vec{a} = (2,3,4)$ και $\vec{б} = (2,5,6)$ αντιστοιχα.

$$\left\{\begin{array}{l} \overset{(\varepsilon_1)}{A_1x + B_1y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0}, \quad \overset{(\varepsilon_2)}{A_2x + B_2y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0} \\ \vec{n_1} = (A_1, B_1, \Gamma_1) \perp (\varepsilon_1), \quad \vec{n_2} = (A_2, B_2, \Gamma_2) \perp (\varepsilon_2) \\ \quad \vec{n_1} \times \vec{n_2} \perp (\vec{n_1}), (\vec{n_2}) \parallel (\varepsilon) \end{array}\right\}$$

$$\vec{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

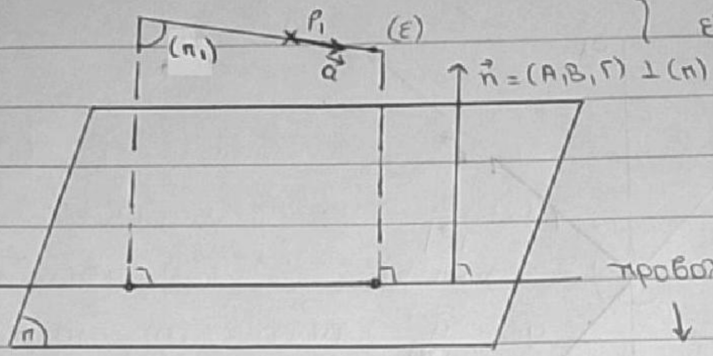
$$\vec{б_0} = \frac{\vec{б}}{|\vec{б}|} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$$

δ_1, δ_2: $\dfrac{x-1}{\pm\lambda_1+\mu_1} = \dfrac{y-(-4)}{\pm\lambda_2+\mu_2} = \dfrac{z-3}{\pm\lambda_3+\mu_3}$ { Εξισωσεις διχοτομων }

Η μια διχοτομος τα θετικα η αλλη τα αρνητικα γιατι θα εχω $-\vec{б_0}$, $-\vec{a_0}$

Προβολη Ευθειας σε επιπεδο

{ Η τομη δυο επιπεδων
Είναι επιπεδο }



προβολη της (ε) στο (π)

↓

Είναι η τομη του επιπεδου (π) με το επιπεδο $(\pi_1) \perp (\pi)$

⇓

προβαλουν επιπεδο

(π): $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$

(ε): $\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{\beta} = \dfrac{z - z_1}{\gamma}$

↓

διερχεται $P_1(x_1, y_1, z_1)$

και $\vec{a} = (a, \beta, \gamma) \parallel (\varepsilon)$

Συνεπως μενει ο προσδιορισμος του P_1

Αφου το $(\pi_1) \perp (\pi) \Rightarrow \vec{n} \parallel (\pi_1)$ και $\vec{a} \parallel (\pi_1)$ (αφου $\vec{a} \parallel \varepsilon$)

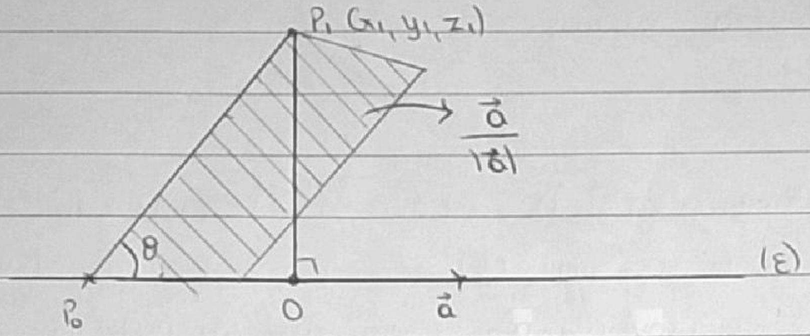
και $P_1(x_1, y_1, z_1)$ σημειο του $(\pi_1) \Rightarrow (\pi_1)$ $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a & \beta & \gamma \\ A & B & \Gamma \end{vmatrix}$

⇓

$A'x + B'y + \Gamma' z + \Delta' = 0$

$\Rightarrow$ η ζητουμενη προβολη $\{ Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0,\ A'x + B'y + \Gamma' z + \Delta' = 0 \}$

Αποσταση σημειου απο ευθεια



$P_0 \in (\varepsilon)$, $\vec{a} \parallel (\varepsilon)$

(*) Οποιο σημειο και να παρω βγαινει ιδιο αποτελεσμα

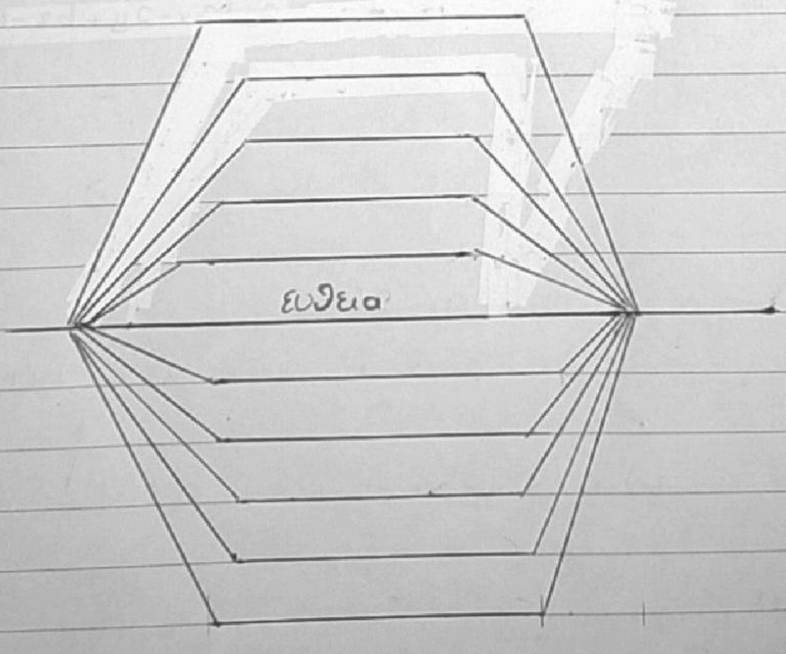
Ψαχνουμε το $|\vec{OP_1}|$

Στο τριγωνο $P_0\hat{P_1}O$: $\sin\theta = \frac{|\vec{P_1O}|}{|\vec{P_0P_1}|} \Rightarrow d = |\vec{P_0P_1}| \cdot \sin\theta$ (*)

και παρατηρουμε οτι $|\vec{P_0P_1} \times \vec{a}| = |\vec{P_0P_1}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin\theta \Rightarrow d = \frac{|\vec{P_0P_1} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$

(*) Ο τυπος της αποστασης ειναι ανεξαρτητος του P_0!!!

Αξονικη δεσμη επιπεδων



Η οικογενεια των επιπεδων τα οποια διερχονται απο την (ε) λεγεται αξονικη δεσμη επιπεδων

Η ευθεια (ε) λεγεται αξονας της δεσμης

Θεωρημα

Εστω $(\pi_1): A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0$, $(\pi_2): A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0$ τα οποια τεμνονται σε ευθεια (ε). Το επιπεδο (π) που διερχεται (και ανηκει στην αξονικη δεσμη των π_1, π_2) απο τον αξονα (ε) $\Leftrightarrow$ το (π) ειναι της μορφης

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0)=0$$

οπου $(\lambda_1,\lambda_2)\neq(0,0)$

Παραδειγμα

Να βρεθει η αξονικη δεσμη του επιπεδου (π) που ανηκει στην αξονικη δεσμη των $(\pi_1): 3x-2y+6z-6=0$ και $(\pi_2): x-y+z+4=0$ και διερχεται απο $P_1(-1,3,2)$

Το (π) εχει εξισωση της μορφης:

$$\lambda_1(3x-2y+6z-6)+\lambda_2(x-y+z+4)=0 \quad ①$$

οπου $P_1 \in (\pi) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=3 \\ z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1=\frac{2}{3}\lambda_2 \quad ⊕$

Αντικαθιστω στην ① το $\lambda_1=2/3\lambda_2$

$$\lambda_2\cdot\left\{\frac{2}{3}(3x-2y+6z-6)+(x-y+z+4)\right\}=0 \Rightarrow \lambda_2\neq0 \quad (\text{λογω } ⊕)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}(3x-2y+6z-6)+(x-y+z+4)=0 \Rightarrow \text{πραξεις}\ldots \Rightarrow$$

$$9x-7y+15z=0$$